Nueva Definición de Número Natural y su Incidencia en la Enseñanza de las Matemáticas

Diego Pareja Heredia. *Universidad del Quindío*. Armenia. Colombia

"*Equivocarse siguiendo un camino propio es preferible a trasegar una ruta ajena, aunque sea la correcta.*"
— Fiódor Dostoievski, Crimen y Castigo. —

Resumen

En este artículo proponemos una definición no convencional de número natural, usando el recurso de clases de equivalencia de ciertas familias de polinomios elementales, a las que llegamos con instrumentos muy intuitivos, como son el copiar y el pegar.

Abstract

In this paper we look for a nonstandard definition of natural number, via equivalence classes of some special polynomial sets, which we construct through elementary and intuitive resources such as, coping and pasting.

Introducción

La idea central del artículo radica en utilizar la intuición natural que se da en los primeros niveles del desarrollo mental del bebé: la *repetición* y la *conjunción*, estas, entendidas como el *repetir* y el *pegar* o *juntar*. No es casual que las primeras palabras que el bebé aprende son: *mamá*, y, *papá*, repetición de las sílabas "*pa*" y "*ma*" y la conjunción de "*an*", y, "*gu*" en la exclamación *angú*.

El proceso de copiar (repetir) es innato y conduce al método más común de aprendizaje. Es así como aprendemos las primeras palabras y letras hasta llegar, a ser expertos no sólo en lecto-escritura sino también, en otras artes como la música y la pintura, por ejemplo. Pegar o juntar es fácil e intuitivo como es el repetir o copiar. Repetir y pegar son conceptos muy cercanos. Repetir y pegar aparecen simultáneamente en las palabras papá y mamá porque en ellas estamos pegando y a la vez repitiendo las sílabas.

Nuestro objetivo aquí es aprender aritmética usando las mismas operaciones básicas comunes en la era del computador: *Copiar* y *Pegar*. El punto de partida es el conjunto de diez símbolos básicos y la analogía de las operaciones de adición y multiplicación, con el pegar y el copiar.

La mayor parte del material aquí expuesto, es elemental y está concebido para el análisis y la reflexión de los profesores interesados en alternativas no convencionales de enseñar aritmética en forma razonada y no memorística. La filosofía que anima esta exposición tiene su origen en Gottlog Frege[1], el matemático y lógico alemán quien por primera vez entendió la importancia de

[1] Ver el interesante artículo: WAGNER, S. *Frege's Definition of Number*
Notre Dame Journal of Formal Logic. Volume 24, Number 1, January 1983. Disponible en la Web.

la definición de los conceptos matemáticos y en particular el de la idea de número. Su acercamiento a la definición de número lo hizo vía el concepto de ancestralidad[2].

¿Por qué una nueva definición de número natural podría ser útil? En nuestro caso al menos, porque esta definición nos da una panorámica nueva de lo que son los números primos, tan importantes en el estudio de la aritmética. Esta definición permite introducir los números primos sin tener que pasar por la división. La división entre números naturales no debería introducirse sino hasta tener una comprensión clara de un conjunto mayor, en el que, esta operación sea cerrada, en el sentido algebraico. Nuestro interés se centra en la búsqueda de un proceso que permita reversar la multiplicación en números naturales, es decir, que si se conoce el producto c, de la multiplicación de a y b, podamos encontrar la forma de recobrar estos factores. Este proceso lo llamaremos *factorización*.

Este acercamiento elemental a las matemáticas combina aritmética y álgebra. Desde las operaciones básicas llegaremos a la solución de ecuaciones, aun a las de grado mayor que dos, cuando sus soluciones están en **Q** (el conjunto de los números racionales). Usando nuestra metodología, es posible introducir tempranamente en la enseñanza, nociones de algebra y matemáticas avanzadas. También se puede llegar a conjuntos como **Z**, el conjunto de los enteros, a **R** el conjunto de los números reales y a **C** el conjunto de los números complejos, sin mayores traumatismos. Conceptos como *irracionalidad*, *contabilidad* e *incontabilidad*, muy propias de las matemáticas avanzadas podrían apropiarse en los primeros años de la educación matemática.

Clases de Equivalencia

Clasificar objetos en clases, es bastante común en la ciencia. Por ejemplo, los números naturales los podemos concebir como la unión de dos conjuntos: los números pares y los números impares. Los números pares son los múltiplos de dos y los impares son aquellos que no lo son.

Estamos interesados aquí en ciertas clases especiales $\mathscr{F}$ de un conjunto dado **A**, en el que se ha definido una relación R. Estas clases se caracterizan por las propiedades siguientes: Para todo elemento *a, b, c, d, …*, de $\mathscr{F}$ se satisface:

Reflexividad: *aRa*
Simetría: *aRb*, implica, *bRa.*
Transitividad: Si *aRb*, y, *bRc*, entonces, *aRc.*

Si R satisface las anteriores propiedades en un conjunto dado, este conjunto queda particionado por R en subconjuntos disyuntos (sin elementos comunes), cuya unión reproduce al conjunto inicial. Es el caso como mencionamos, de los pares e impares, cuya unión reproduce a todos los números naturales.

El conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales {0,1, 2,…}, se puede definir en muchas formas. Aquí nos proponemos dar una definición constructiva de ellos, en base a las ideas intuitivas de copiar y pegar. Copiar lo entenderemos como la repetición de un proceso o una acción; en el caso

[2]Los remito a mis notas de epistemología: http://matematicasyfilosofiaenelaula.info/Epistemologia%202009/Los%20Números%20Naturales%20y%20el%20Concepto%20de%20Buena%20Ordenacion.pdf

numérico lo tomamos como multiplicación. Similarmente, pegar en nuestro contexto significa juntar dos cosas, y en el sentido numérico, significará suma.

En la escritura partimos de una serie de símbolos para las letras, el alfabeto; en el lenguaje numérico también tendremos en nuestra caja de herramientas el conjunto de símbolos D = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}[3]. Cada elemento en D lo llamaremos *dígito* o *cifra*. Aceptemos también, la posibilidad de definir dos operaciones en $\mathbb{N}$, internas o cerradas: (+, **·**), de tal forma que si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces, $a + b \in \mathbb{N}$, y, $a \cdot b \in \mathbb{N}$. Cómo vamos a obtener $a + b$, y, $a \cdot b$, partiendo de a y b, lo sabremos al trasladar estas operaciones al campo de los polinomios, cuando tengamos una definición de número natural[4]. Teniendo entendido el significado de multiplicación y suma entraremos a definir cierto tipo de polinomios con características especiales que van a inducir familias de donde derivaremos el origen de los números naturales.

Intuitivamente "pegar" a, y, b, lo entenderemos aquí como la suma de los números a, y, b, en símbolos, $a + b$. "Copiar" a, y, b, en nuestro contexto, será entendido como la multiplicación de a por b, tomar a copias de b, o, b copias de a, simbólicamente, $a \cdot b$, o también, $a \times b$, o simplemente, ab.

Aproximación a los Polinomios de una Variable

Los polinomios en general son invenciones matemáticas muy útiles en diferentes ramas de las ciencias. Aquí construiremos polinomios sencillos en el contexto de los números naturales que permitan entender, además de la definición de número natural, las operaciones aritméticas con sus algoritmos y una forma de ver el conjunto de los números primos sin hacer alusión a una operación, tan exótica en el medio elemental, como es la llamada división.

Los polinomios tienen la virtud de que su construcción no necesita más que suma y multiplicación; ambas operaciones muy sencillas en $\mathbb{N}$. Empecemos por definir lo que entendemos por: $a \cdot a = a^2$, para $a \in \mathbb{N}$. En lenguaje intuitivo esto corresponde a tomar a copias de a. Es decir, partiendo de a, uno va agregando a al montón, hasta repetir el proceso un número de a veces. Esta repetición es lo que induce a afirmar impropiamente que la multiplicación es una suma abreviada[5]. Inductivamente podemos definir a^3, como $a \cdot a^2$, y, a^n, como, $a \cdot a^{n-1}$. Si tenemos a^n, podemos hablar de sus múltiplos da^n, para $d \in$ D = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Ahora ya podríamos sumar múltiplos de distinto grado de a^n, como por ejemplo:

$$\boxed{d_0a^0 + d_1a^1 + d_2a^2 + \ldots + d_{n-1}a^{n-1} + d_na^n} \quad (*)$$

Donde los coeficientes d_i pertenecen a D. Aquí, a^0 lo aceptaremos como 1 y a^1, como el mismo a. Una expresión del tipo (*) se llama un polinomio de grado n en la variable a con coeficientes en el conjunto D y en nuestro caso, a puede ser cualquier número natural distinto de cero y de uno. Polinomios como estos serán la base para definir los números naturales. Cuando $a = 10$, lo denominaremo polinomio decimal y si $a = 2$, será un polinomio binario siempre que d_i tome los valores en {0, 1}. Por ejemplo el número 2017 se podría asociar al polinomio decimal $2a^3 + 0 \cdot a^2$

[3] Podemos seleccionar diferentes bases para representar los números naturales, la más simple por supuesto, es {0, 1}.
[4] Para una exposición detallada del uso de los polinomios en la aritmética ver: http://matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/ROOTS%20AND%20STEMS%20V.1.pdf
[5] Ver: http://matematicasyfilosofiaenelaula.info/Filosofia/lamulriplicacionnoesunasumaa.pdf

$+ 1 \cdot a + 7 = 2a^3 + a + 7 = 2 \cdot 10^3 + 10 + 7 = 2000 + 10 + 7 = 2017$. O también al polinomio binario $1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 1 = 2017$.

Se ha hecho convencional en algebra elemental usar la letra x como variable, y de aquí en adelante en los polinomios decimales del tipo (*) usaremos la letra x en lugar de a. Reservaremos la letra a para representar un número natural arbitrario.

Los Números Naturales representados como Familias de Polinomios Decimales

El conjunto D mencionado arriba forma la base para representar a todo número natural a. En este caso, por aparecer diez elementos en D, decimos que tenemos para la representación numérica, una base decimal. El origen de esta representación viene desde la India antigua y fueron los árabes que trajeron a occidente este sistema en la Edad Media y que fue hecho popular por Leonardo Fibonacci a través de su obra *Liber Abaci* (1202).

Llamemos x al número de elementos de D, es decir para nuestro caso decimal, $x = 10$. Las potencias de 10 las notamos como $10^0, 10^1, 10^2, \ldots$, ó, $1, x, x^2, x^3, \ldots$,. El hecho de que nuestro sistema sea decimal, nos permite establecer desde un principio una regla sintáctica básica[6] y es ésta:

$$x^n = 10\, x^{n-1}$$

Aquí n representa la posición del dígito en el numeral contada de derecha a izquierda, donde la posición 0 es la primera a la derecha y la posición n es aquella de la extrema izquierda.

Usando el proceso de copiar y pegar, la sucesión natural de contar aparece entonces escrita así: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, x, x + 1, \ldots, x + 9, 2x, 2x + 1, \ldots, 2x + 9, 3x, 3x + 1, \ldots, 9x + 9, x^2, x^2 + 1, \ldots, 2x^2, 2x^2 + 1, \ldots, 9x^2 + 9, \ldots, 9x^2 + 9x + 9, x^3, x^3 + 1, \ldots$.

El número 2017, en nuestro modelo luce como: $2x^3 + x + 7$. Olvidando que $x = 10$, una expresión como $2x^3 + x + 7$, aparece como ejemplo de un objeto algebraico cuyo nombre es polinomio de segundo grado de una variable con coeficientes enteros. En otros trabajos[7], he propuesto los algoritmos para efectuar las operaciones aritméticas con el uso de los números expresados como polinomios.

Definición de Polinomio Estándar

Siguiendo el patrón mostrado arriba, a todo número natural a representable digitalmente como $a = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$, va a corresponder la suma

---

[6] Ver el resumen de mi ponencia en ICME13, Hamburgo, 2016: http://matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias/Ponencia_ICME2016.Hamburgo.pdf

[7] Ver por ejemplo: http://matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/Beginning_Abstract_Algebra_at_Elementary_School.pdf y http://matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/ROOTS%20AND%20STEMS%20V.1.pdf

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 = \sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i} x^{n-i} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

En esta expresión los $a_i \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ se llaman, como ya dijimos, cifras o dígitos del numeral correspondiente al número natural a cuyo valor se obtiene al sumar la expresión de la derecha cuando $x = 10$. Al polinomio de la derecha lo denominamos *Polinomio Estándar* asociado al número a. Así por ejemplo, el polinomio estándar asociado a 1942 es: $x^3 + 9x^2 + 4x + 2$.

En álgebra abstracta se acostumbra representar al conjunto de todos los polinomios de una variable x con coeficientes en los números naturales con la notación $\mathbb{N}[x]$. Para nuestro caso los polinomios estándar serán una parte de $\mathbb{N}[x]$.

De aquí en adelante notaremos al polinomio estándar asociado al número a como:

$$\mathrm{P}_a(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i} x^{n-i}$$

Esto significa que cada número natural está unívocamente asociado a un polinomio estándar. Este es el caso, por ejemplo para $a = 23578$, asociado al polinomio estándar $2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 7x + 8$. También, $2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 7x + 8$ está asociado el número 23578.

A cada número natural a es posible además, asociar todos los polinomios P en $\mathbb{N}[x]$ tales que $\mathrm{P}(10) = a$. Esta inyección de $\mathbb{N}[x]$ en $\mathbb{N}$ va a permitir más adelante mostrar cómo los números algebraicos son enumerables. Verbigracia, el número 124 puede asociarse al conjunto de polinomios $\{124, 12x + 4, x^2 + 24, x^2 + 2x + 4\}$, por cuanto que, cada uno de ellos tiene un valor numérico de 124 cuando $x = 10$.

En un contexto general: a todo número a, podemos asociar una familia de polinomios de variable x; más exactamente, todos los polinomios P tales que $\mathrm{P}(10) = a$. Estas clases $\mathscr{F}$, son clases de equivalencia en el seno de $\mathbb{N}[x]$, esto es: si f y g pertenecen a $\mathscr{F}$, entonces $f(10) = g(10) = a$. No es difícil verificar la reflexividad, simetría y transitividad de la relación definida. En este caso diremos que f y g **son congruentes módulo** a, o, equivalentes módulo a. Si tenemos un número a dado y su clase $\mathscr{F}$ de polinomios equivalentes, estos polinomios los entenderemos como iguales, y abusando un poco del lenguaje, diremos que $f = g$ en $\mathscr{F}$.

Definición de Polinomios Congruentes

Dos polinomios P y Q en $\mathbb{N}[x]$, son congruentes módulo a, siempre que, $\mathrm{P}(10) = \mathrm{Q}(10) = a$

Un par de polinomios podrían ser congruentes pero no necesariamente iguales en el sentido algebraico. Es el caso de $\mathrm{P}(x) = x^2 + 2x + 4$ y $\mathrm{Q}(x) = 12x + 4$. Ellos son congruentes módulo 124, porque $\mathrm{P}(10) = \mathrm{Q}(10) = 124$. Sin embargo el primero es un polinomio cuadrático y el segundo es lineal y gráficamente lucen muy distintos.

Definición de Número Natural usando Clases de Equivalencia

Definimos al número natural a, encifrado $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)$, como la familia $\mathscr{F}$, de todos los polinomios equivalentes modulo a. Simbólicamente

$$\Omega_a = \{ \sum_{j=0}^{j=n} b_{n-j} x^{n-j} \in \mathbb{N}[x], \text{ tal que, todo P y Q en } \mathscr{F}, \text{ satisface } P(10) = Q(10) = a \}$$

Donde los b_{n-j} son coeficientes en $\mathbb{N}$**.** Según esta definición podemos identificar al número natural a con Ω_a, la clase de todos los polinomios congruentes con él, módulo a.

Cuando todos los coeficientes en la familia son nulos, el número definido es el cero. Si la familia sólo contiene al polinomio constante $P(x) = 1$ tenemos el número uno. Y así podemos seguir con los números mayores que 1.

$\mathbb{N}[x]$ es mucho más que el conjunto de polinomios estándar. Por ejemplo $12x^3 + 28x^2 + 2x + 43$ está en $\mathbb{N}[x]$, sin embargo, no es un polinomio estándar, pero estará en alguna clase de equivalencia donde aparece un polinomio estándar. En efecto, $12x^3 + 28x^2 + 2x + 43 = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 6x + 3$ en la clase Ω_{14863}, puesto que el valor numérico de ambos es 14863, cuando $x = 10$.

Cuando uno está, por ejemplo en Ω_{124}, $P(x) = x^2 + 2x + 4$ y $Q(x) = 12x + 4$ son congruentes modulo 124, porque $P(10) = Q(10) = 124$. En Ω_{124}, uno puede identificar $P(x)$ y $Q(x)$ es decir, $x^2 + 2x + 4 = 12x + 4$, aunque esto no sea válido fuera de esta clase.

Esta definición de número natural nos permitirá introducir *el concepto de número primo en forma muy distinta, a la que hemos conocido desde tiempos griegos, ya que en este caso, no haremos uso de la división para nada*. La razón es que, entre polinomios, el proceso inverso a la multiplicación es la factorización. Esto significa que <u>la multiplicación en Ω_a puede reversarse usando factorización</u>.

Ilustremos lo anterior con un ejemplo. Consideremos $P(x) = 3x + 1$ y $Q(x) = 7x + 3$. Su producto es, $P(x)Q(x) = 21x^2 + 16x + 3$. P y Q son polinomios estándar asociados a 31 y 73 respectivamente. El producto de 31 y 73 es 2263. Si tomamos $a = 2263$, en Ω_a es lícito lo siguiente: $21x^2 + 16x + 3 = 22x^2 + 6x + 3 = 2x^3 + 2x^2 + 6x + 3$. Este último producto puede factorizarse reversando el proceso para recobrar $P(x)$ and $Q(x)$, como se muestra en las siguientes líneas. [8]

$2x^3 + 2x^2 + 6x + 3 = 21x^2 + 16x + 3 = 21x^2 + 7x + 9x + 3 = 7x(3x +1) + 3(3x + 1) = (3x + 1)(7x + 3) = P(x)Q(x)$. Así, $P(x) = 3x + 1$ y $Q(x) = 7x + 3$.

Si $S(x)$ es el polinomio estándar de un número a y $S(x) = P(x)Q(x)$ in Ω_a, con P y Q no idénticamente unitarios, entonces $a = P(10)Q(10)$ es compuesto. Esto motiva la siguiente definición.

Definición de Números Primos y Compuestos

Un número a, definido por Ω_a, se dice *compuesto* si existe en Ω_a, un polinomio factorizable P. En otro caso el número a lo llamaremos número *primo*.

[8] Muchos ejemplos de este tipo se encuentran en: *How to Express Counting Numbers as a Product of Primes. Beginning Abstract Algebra at Elementary School*. http://matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos.htm

Ejemplo

El número 747 = Ω_{747} = {$7x^2 + 4x + 7$, $6x^2 + 14x + 7$, $6x^2 + 12x + 27$, … , 747}.

Puesto que el polinomio $6x^2 + 12x + 27$ puede factorizarse como $3(2x^2 + 4x + 9)$, podemos decir que 747 es compuesto. Aun más, $249 = 2x^2 + 4x + 9 = 24x + 9 = 3(8x + 3)$. Por lo tanto $747 = 3(2x^2 + 4x + 9) = 3[3(8x + 3)] = 3^2(8x + 3) = 3^2 \cdot 83$. Como, $8x + 3$, no puede expresarse como producto de polinomios más simples, el número 83 será un número primo. Por lo tanto hemos encontrado una representación de 747 como producto de primos sin el recurso de la división.

La definición de arriba nos permite recibir de regalo el *Teorema Fundamental de la Aritmética*.

Teorema Fundamental de la Aritmética

Todo número natural *a*, es, o primo o se puede expresar como producto de primos en una sola forma, salvo el orden de los factores.

Entendemos por factorizar, el proceso inverso a multiplicar, en otras palabras, el proceso de recuperar los factores cuando se conoce el producto. Se trata de encontrar al menos dos factores a, b cuando se sabe que $c = a \cdot b$, con, $a > 1$ and $b > 1$.

Ejemplo. Hallar los factores primos de 1633.

La definición de 1633 se da en términos de Ω_{1633}. Dentro de esta clase de polinomios estará, entre otros elementos, $x^3 + 6x^2 + 3x + 3$. Este polinomio es equivalente en Ω_{1633} a los siguientes:

$1633 = x^3 + 6x^2 + 3x + 3 = 10x^2 + 6x^2 + 3x + 3 = 16x^2 + 3x + 3 = 15x^2 + 13x + 3 = 14x^2 + 23x + 3 = 14x^2 + 21x + 2x + 3 = 7x(2x + 3) + (2x + 3) = (2x + 3)(7x + 1)$

De allí se desprende que los factores de $1633 = x^3 + 6x^2 + 3x + 3$ son: $a = 2x + 3 = 23$, and $b = 7x + 1 = 71$, ambos primos. Esto muestra que $1633 = 71 \cdot 23$.

Ejemplo

Este ejemplo aparece en un reciente artículo[9] y pregunta por los factores del polinomio, $f(x) = x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x - 1$ in $\mathbf{Z}[x]$, el anillo de polinomios con coeficientes enteros.

Aunque f no está entre los polinomios que estamos tratando, por la aparición de coeficientes negativos, si podemos asociarlo con el número 110.101.009, supuesto $x = 10$. El problema aquí sería factorizar este número primero, y entonces tratar de descubrir a través de estos factores, los polinomios asociados a estos números.

Usando en el celular la aplicación de Wolfram para factores primos, uno encuentra los siguientes: 73, 101, 109, and 137. Estos números pueden asociarse a los polinomios $7x + 3$, $x^2 + 1$, $x^2 + 9$, $x^2 + 3x + 7$. Los autores del artículo sólo encuentran como factores primos de $f(x)$ a: $x^2 + 1$, $x^2 + x -$

[9] Ayad, M. et al. *When Does a Given Polynomial with Integer Coefficients Divide Another*? **The American Mathematical Monthly.** Vol. 123, No. 4 April 2016, Pag. 380.

1 and $x^4 + 1$. Mi explicación es: (1) Supuesto $x = 10$, encontramos que, $x^2 + x - 1 = x^2 + 9$. (2) Al usar la propiedad sintáctica $x^n = 10x^{n-1}$, el producto $(7x + 3)(x^2 + 3x + 7) = x^4 + 1$. El polinomio $x^4 + 1$ es irreducible en el anillo $\mathbf{Z}[x]$ de polinomios con coeficientes enteros; aunque el número 10001 asociado al polinomio $x^4 + 1$, sí factoriza como $73{\cdot}137$, como puede probarse en Ω_{10001}.

$10001 = x^4 + 1 = 100x^2 + 1 = 99x^2 + 10x + 1 = \ldots = 91x^2 + 88x + 3{\cdot}7 = 7{\cdot}13x^2 + 13{\cdot}3x + 7{\cdot}7x + 3{\cdot}7 = 13x(7x + 3) + 7(7x + 3) = (7x + 3)(13x + 7) = 73{\cdot}137$.

En consecuencia, 110.101.009 factoriza como $73{\cdot}101{\cdot}109{\cdot}137$, mientras que, $x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x - 1$, tiene como factores irreducibles a: $(x^2 + 1)$, $(x^2 + x - 1)$, $(x^4 + 1)$. La moraleja que nos recordará este ejemplo es que, la factorización en los naturales difiere de la factorización en $\mathbf{Z}[x]$ el conjunto de los polinomios con coeficientes enteros.

Procedimiento para hallar factores primos de un número *a*

Si $P(x)$ es el polinomio estándar de a y si $P(x) = R(x)S(x)$ en Ω_a, entonces $a = R(10)S(10)$.

Si R(10) y S(10) son primos, esos son los factores primos de *a*, de lo contrario continuamos el proceso hasta que todos los factores sean primos.

En Ω_a todo polinomio p tiene la propiedad de que $p(10) = a$. Como $P(x) = R(x)S(x)$, se sigue que $a = P(10) = R(10)S(10)$.

Como el ejemplo anterior muestra, no siempre es verdadero que si, $P(x) = R(x)S(x)$ en Ω_a, entonces $P(x)$ factoriza en la misma forma en $\mathbf{Z}[x]$. Veamos esto en otro ejemplo.

Ejemplo

Encontrar los factores primos, si los hay, de $f(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 9$.

Este polinomio f corresponde al polinomio estándar de $a = 11449$. En Ω_a podemos establecer las siguientes igualdades:

$11449 = x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 9 = 114x^2 + 4x + 9 = \ldots = 100x^2 + 140x + 49 = (10x)^2 + 2(10)(7)x + 7^2 = (10x + 7)^2 = (x^2 + 7)^2 = 107^2$.

Esto muestra que $11449 = 107{\cdot}107$. Sin embargo $f(x)$ es irreducible en $Z[x]$ porque todas las raíces de f son complejas. En efecto $x^2 + 7$ no tiene raíces reales. Podemos observar también que 107 es un número primo asociado a un polinomio irreducible en $\mathbb{N}[x]$. Esto refuerza lo dicho en el ejemplo anterior: el hecho de que un número dado factorice no implica que su polinomio estándar sea factorizable. Lo cierto es la proposición recíproca: *Si el polinomio estándar de un número natural factoriza, también el número de esta clase factoriza.*

Ejemplo

Intentar con el recurso de Ω_{30240}, la factorización de $f(x) = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x$ en $Z[x]$,.

Hemos escogido 30240 a propósito, porque $f(10) = 30240$ y en Ω_{30240} podemos establecer las siguiente igualdades con el recurso de la regla sintáctica $x^n = 10x^{n-1}$, extendida a Z[x].

$x^5 – 10x^4 + 35x^3 – 50x^2 + 24x = 10x^4 – 10x^4 + 35x^3 – 50x^2 + 24x = 35x^3 – 50x^2 + 24x = 35x^3 – 5x^3 + 24x = 30x^3 + 2x^2 + 4x = 30240$.

El último polinomio arriba, lo podemos factorizar en Ω_{30240}, como:

$30x^3 + 2x^2 + 4x = 2(15x^3 + x^2 + 2x) = 2(14x^3 + 10x^2 + 12x) = 2^2(7x^3 + 5x^2 + 6x) = 2^2(7x^2 + 5x + 6)x = 2^3(3x^2 + 7x + 8)x = 2^4(x^2 + 8x + 9)x = 2^4 3(6x + 3)x = 2^4 3^2(2x + 1)x = 2^4 3^3 \cdot 7x = 2^3 3^2(2\cdot 3)(2\cdot 5)(7)$.

Si ponemos: $x = 10 = 2\cdot 5$, $x – 3^2 = 1$, $x – 2^3 = 2$, $x – 7 = 3$, $x – 2\cdot 3 = 4$. Encontramos: $x = 2\cdot 5$, $x – 1 = 3^2$, $x – 2 = 2^3$, $x – 3 = 7$, $x – 4 = 2\cdot 3$.

Reemplazando queda: $x^5 – 10x^4 + 35x^3 – 50x^2 + 24x = (x – 2)(x – 1)(x – 4)x(x – 3)$.

El anterior proceso muestra cómo factorizar algunos polinomios de grado mayor, con el recurso de su representación numérica. Claro, siempre bajo el supuesto que el polinomio sea factorizable en **Z**[x].

En este caso además de factorizar el polinomio hemos hallado sus ceros o en otras palabras hemos resuelto la ecuación, $x^5 – 10x^4 + 35x^3 – 50x^2 + 24x = 0$. Las raíces son: $x_1 = 0$, $x_2 =1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, and $x_5 = 4$, como puede verificarse fácilmente. Este ejemplo nos dice, que si previamente sabemos que el polinomio factoriza en Z[x], podemos hallar las raíces usando Ω_{30240}.

Ejemplo.

Podemos resolver también ecuaciones lineales y cuadráticas sin conocimiento mayor en algebra. Encontremos los números x tales que $f(x) = x^2 – 7x + 10 = 0$.

El primer paso es encontrar el número natural asociado a f, el polinomio que figura en la ecuación. Suponiendo que estamos en Ω_a, extendida a Z[x], podemos tomar $x =10$, y así $f(10) = 40 = 2^3\cdot 5 = (10–2)(10–5) = (x – 2)(x – 5)$.

Lo anterior nos permite transformar la ecuación inicial en: $x^2 – 7x + 10 = (x – 2)(x – 5) = 0$.

Claramente $x = 2$, y, $x = 5$, satisfacen la ecuación.

Un ejemplo final muestra cómo resolver una ecuación cúbica que tiene raíces racionales. Más ejemplos de soluciones de ecuaciones pueden encontrarse en otros de mis artículos recientes[10]

Ejemplo

Una ecuación cúbica como $6x^3 + 25x^2 + 22x + 3 = 0$, que tiene raíces en **Q** puede resolverse usando el polinomio estándar.

[10] Ver: http://matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/THE_BIRTH_OF_ALGEBRAIC_NUMBERS.pdf

El primer paso hacia la solución es encontrar el polinomio estándar que determine la clase Ω_a. Para esto transformamos el polinomio inicial usando la propiedad sintáctica $x^n = 10x^{n-1}$ que es lo mismo que tomar $x = 10$

$6x^3 + 25x^2 + 22x + 3 = 8x^3 + 5x^2 + 22x + 3 = 8x^3 + 5x^2 + 2x^2 + 2x + 3 = 8x^3 + 7x^2 + 2x + 3 = 8723$. Esto determina a.

El segundo paso en el procedimiento es factorizar el polinomio estándar en Ω_a, como lo hicimos en los ejemplos previos.

$8723 = 8x^3 + 7x^2 + 2x + 3 = 87x^2 + 2x + 3 = \ldots = 77x^2 + 102x + 3 = 7\cdot 11x^2 + 99x + 33 = 11(7x^2 + 9x + 3) = 11(79x + 3) = 11(78x + 13) = 11(6\cdot 13x + 13) = 11\cdot 13\,(6x + 1) = 11\cdot 13\cdot 61 = (x + 1)(x + 3)(6x + 1)$.

Por lo tanto

$6x^3 + 25x^2 + 22x + 3 = (x + 1)(x + 3)(6x + 1) = 0$.
Y las raíces de la ecuación serán:
$x = -1$, $x = -3$, $x = -1/6$.

Los ejemplos anteriores muestran algunas aplicaciones no convencionales que resultan al introducir una definición diferente de número natural.

Conclusión

Las ideas expuestas a lo largo de este trabajo buscan estimular el aspecto creativo de la educación matemática. He tratado a lo largo de mis trabajos en los últimos años, citados a pie de página, de dar los primeros pasos en una senda que conduzca a una mejora de la educación matemática, para bien de las nuevas generaciones.

Quedan muchas dudas y preguntas sobre el tema tratado aquí. Pero mi generación necesita dar las primeras puntadas hacia una reforma de la educación, de manera que, las matemáticas no se sigan enseñando con los ya obsoletos procedimientos aritméticos heredados de la edad media.

Traducción y revisión del artículo:
http://matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/A_NEW_DEFINITION_OF_NATURAL_NUdMBER.pdf

Armenia, Colombia, Noviembre 2017.